טורי פורייה והתמרות אינטגרליות - תרגיל בית 1

מרחבי מכפלה פנימית ומערכות אורתונורמליות

1. יהי V מרחב הפונקציות הממשיות הרציפות $f(x)$ על חצי הישר $[0,\infty)$ שעבורן האינטגרל המוכלל הבא $\int\limits_0^\infty e^{-x}f(x)^2dx$ מתכנס. לכל $f(x)$ ב- V נסמן:

$$||f(x)|| = \sqrt{\int\limits_0^\infty e^{-x}f(x)^2dx} \tag{1}$$

(א) הראו ש- V הוא מרחב ליניארי.

(ב) הראו שהפעולה $||\cdot||$ המוגדרת ב-(1) היא נורמה ב- V.

(ג) מצאו מכפלה פנימית $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ב- V שמשרה את הנורמה המוגדרת ב-(1).

(ד) מצאו מהקבוצה $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ מערכת אורתונורמלית ב- V ביחס למכפלה הפנימית שהגדרתם ב-ג'.

(ה) מצאו מספרים a_0,a_1,a_2 המקטינים למינימום את האינטגרל:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\left(\sin x - a_0 - a_1x - a_2x^2\right)^2dx$$

2. יהי V מרחב מכפלה פנימית כלשהו.

(א) הוכיחו שהנורמה המושרית ע"י המכפלה הפנימית ב- V, מקיימת לכל u,v ב- V את הזהות

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2\left\{||u||^2 + ||v||^2\right\}$$

(ב) הוכיחו שאם V מרחב מכפלה פנימית מעל לממשיים אזי

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left\{||u+v||^2 - ||u-v||^2\right\}$$

(ג) הוכיחו שאם V מרחב מכפלה פנימית מעל המרוכבים אזי

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left\{(||u+v||^2 - ||u-v||^2) + i(||u+iv||^2 - i||u-iv||^2)\right\}$$

(ד) הוכיחו שאם $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V אזי לכל שני איברים u,v ב- V מתקיימת זהות פרסבל המוכללת:

$$\langle u,v\rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle u,e_k\rangle\overline{\langle v,e_k\rangle}$$

<u>תזכורת:</u> המערכת האורתונורמלית $\{e_1,e_2,e_3,\dots\}$ סגורה במרחב מכפלה פנימית V אם לכל $u\in V$ מתקיים $\lim\limits_{m\to\infty}\left|\left|u-\sum\limits_{n=1}^m\langle u,e_n\rangle e_n\right|\right| = 0$.

3. יהי V מרחב כל הפונקציות הממשיות $f:(0,3]\to\mathbb{R}$, כך ש- f מקבלת ערכים קבועים בכל אחד מהקטעים $[0,1)$, $[1,2)$ ו- $[2,3)$.
עבור כל קטע נתון $(a,b]$, נגדיר את הפונקציה $\chi_{(a,b]}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $\chi_{(a,b]}(x)=1$ לכל $x\in(a,b]$ ו- $\chi_{(a,b]}(x)=0$ לכל $x\notin(a,b]$ (מקובל לקרוא לפונקציה $\chi_{(a,b]}$ "הפונקציה המציינת של $(a,b]$").
נסמן ב- $\phi_1=\chi_{(0,1]},\phi_2=\chi_{(1,2]},\phi_3=\chi_{(2,3]}$ ונשים לב כי לכל $f\in V$ קיימים קבועים $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x)=\alpha\phi_1+\beta\phi_2+\gamma\phi_3$.
נגדיר מכפלה פנימית ב- V ע"י הנוסחה $\langle f,g\rangle=\int_0^3 f(x)g(x)dx$ לכל f ו-g ב-V.

(א) נניח ש- $f=\alpha\phi_1+\beta\phi_2+\gamma\phi_3$ ו- $g=a\phi_1+b\phi_2+c\phi_3$. חשבו את $\langle f,g\rangle$.

(ב) יהי W מרחב כל הפונקציות f בעלות הצורה $f=\alpha(\phi_1+\phi_2)+\beta(\phi_3-\phi_1)$ כאשר α ו-β הם קבועים ממשיים כלשהם. מצאו מערכת אורתונורמלית אשר פורשת את W. מצאו מספרים A, B ו- C כך ש $f\in W$ אם ורק אם $f=x\phi_1+y\phi_2+z\phi_3$ והמספרים הממשיים הקבועים x , y ו-z מקיימים $Ax+By+Cz=0$.

(ג) תהי $f=\phi_1+\phi_3$. מצאו, בעזרת משפט ההיטל האורתוגונלי, את המספר

$$\min_{g\in W}\int_0^3|f(t)-g(t)|^2\,dt\ .$$

כמו-כן מצאו את הפונקציה g ב-W שעבורה מתקבל המינימום הזה.

(ד) תהינה $u=x_1\phi_1+y_1\phi_2+z_1\phi_3$ ו- $v=x_2\phi_1+y_2\phi_2+z_2\phi_3$. מצאו קשר בין הנורמה $\|u-v\|=\sqrt{\langle u-v,u-v\rangle}$ לבין המרחק ב- $\mathbb{R}^3$ בין הנקודות (x_1,y_1,z_1) ו- (x_2,y_2,z_2).
(כמובן אפשר להעזר כאן בסעיף (ב)). מצאו תאור גאומטרי פשוט של הקבוצה ב- $\mathbb{R}^3$ של כל הנקודות (x_1,y_1,z_1) בעלות התכונה ש $u=x_1\phi_1+y_1\phi_2+z_1\phi_3\in W$.

(ה) הראו, בעזרת סעיף (ד) שהפתרון שמצאת בסעיף (ג) גם נותן פתרון לבעיה גאומטרית שגרתית מסויימת (איזו בעיה?) ב-$\mathbb{R}^3$.

4. יהי $V=l_2$, מרחב (מעל $\mathbb{C}$) הסדרות המרוכבות והאינסופיות $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty$ כך ש- $\sum_{n=1}^\infty|x_n|^2<\infty$.

נגדיר מכפלה פנימית לכל $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty,y=\{y_n\}_{n=1}^\infty\in l_2$ באופן $\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^\infty x_n\overline{y_n}$,

ולכל $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty\in l_2$ נגדיר את הנורמה המושרת ע"י $||x||=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{\sum_{n=1}^\infty|x_n|^2}$.

נסמן ב- $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ את אוסף וקטורי היחידה, כלומר לכל i הוקטור $e_i\in l_2$ הוא סדרה אינסופית של אפסים פרט ל-1 במקום ה-i-י, ויהא $W=span\{e_i\}_{i=1}^\infty\subseteq l_2$.

(א) נסחו והוכיחו את אי-שיויון קושי שוורץ ב-l_2.

(ב) הוכיחו שלכל $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty\in l_2$ ניתן להתקרב ע"י סידרה מהסגור האלגברי של $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ (כלומר ע"י סידרה מ- W).

(ג) הוכיחו שלכל $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty\in l_2$ הטור פוריה שלו ב-W מתכנס אליו בנורמה.

(ד) יהא $x\in l_2$ ונתון ש- $x\perp e_i$ לכל $i=1,2,3,\ldots$. הוכיחו ש- $x=0$, כלומר שהסדרה $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה.